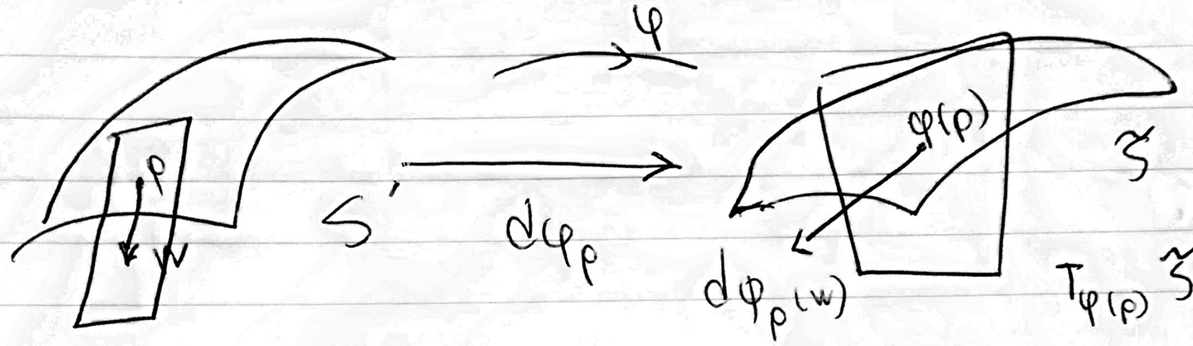
27/11/2017

Μάθημα 14ο

Ορισμός: Μια απεικόνιση $\varphi: S \to \tilde{S}$ καλείται ισομετρία αν-ν

(i) φ είναι διαφορίσιμη

(ii) $I_p(w) = \tilde{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$



Γεωμετρικώς ισότιμες επιφάνειες είναι ισομετρικές

Έστω $S, \tilde{S}$ γεωμ. ισότιμες επιφάνειες, δηλαδή $\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\tilde{S} = T(S)$

$T = T_0 \circ A$, $A \in O(3)$

$\varphi: S \to \tilde{S}$, $\varphi = T|_S$

$d\varphi_p(w) = (\varphi \circ c)'(0) = (T \circ c)'(0) = A c'(0)$

$c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $c(0) = p$, $c'(0) = w$

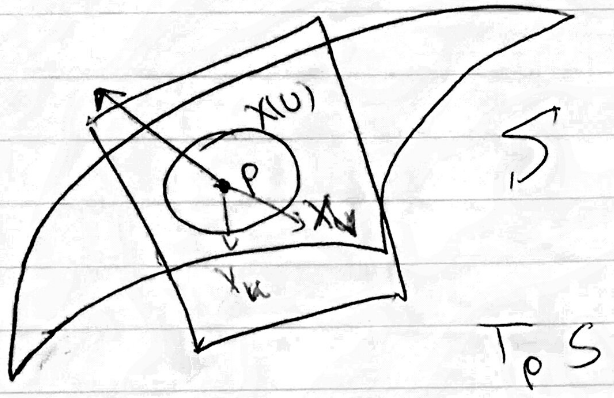
$d\varphi_p(w) = Aw$

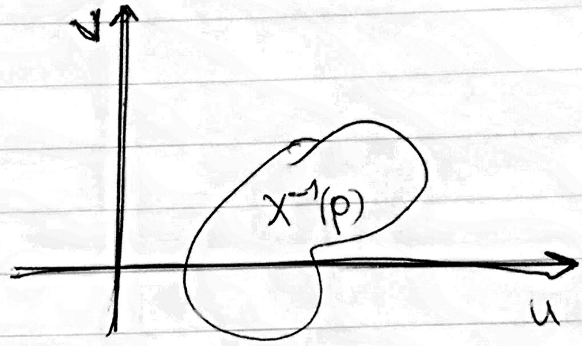
$I_p(w) = \|w\|^2$

$\tilde{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \|Aw\|^2 = \|w\|^2$

Εξωθεν γεωμετρία είναι η μελέτη του τρόπου που αλλάζει το εφαπτόμενο επίπεδο.

Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων
$X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ με παραμέτρους $(u,v) \in U$





Το $X_u \times X_v \,(X^{-1}(p))$ είναι κάθετο στο T_pS
η το διάνυσμα $\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(X^{-1}(p)) = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG-F^2}}(X^{-1}(p))$

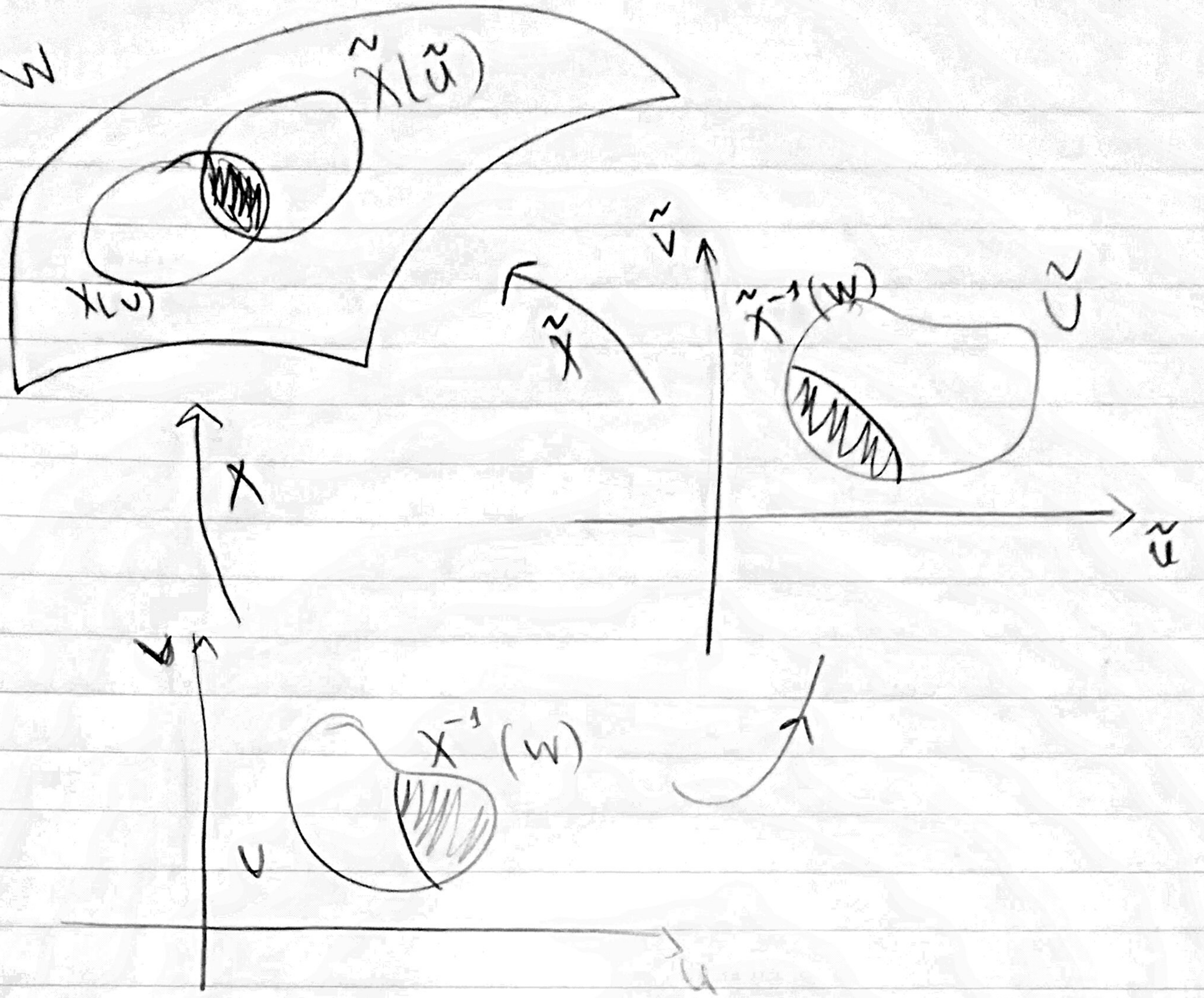
Είναι μοναδιαίο διάνυσμα $\perp T_pS$

Μπορώ να ορίσω και απεικόνιση : $N: X(U) \to \mathbb{R}^3$,
$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}$$

$\phi = \tilde{X}^{-1} \circ X$: $X^{-1}(W) \to \tilde{X}^{-1}(W)$

$$\varphi(u,v) = (\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$$
$$X = \tilde{X} \circ \phi$$
$$X(u,v) = \tilde{X}(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}, \quad \tilde{N} = \frac{\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\|} \circ \tilde{X}^{-1}$$



$$\left.\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \cdot \tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{v}} \\ X_v &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \cdot \tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow N = \pm \tilde{N}$$

$$X_u \times X_v = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}} \times \tilde{X}_{\tilde{u}}$$

$$= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}) \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}$$

$$X_u \times X_v = \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}$$

Προσανατολισιμες - Προσανατολισμένες επιφάνειες

Ορισμός: Μια κανονική επιφάνεια καλείται προσανατολίσιμη αν-ν υπάρχει μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $N: S \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται σε ολόκληρη την επιφάνεια.

$\forall p \in S$, $\|N(p)\| = 1$, $N(p) \perp T_pS$

Ορολογία: Η N αναφέρεται και ως προσανατολισμένη. Προσανατολισμένη επιφάνεια είναι μια προσανατολίσιμη επιφάνεια στην οποία έχω επιλέξει προσανατολισμό.

Θεώρημα (κατασκευή προσανατολίσιμης επιφάνειας)

Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση και $a \in f(U)$

Αν το σύνολο:

$f^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in U \,/\, f(x,y,z) = a\}$.

δεν περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο της f

τότε το $f^{-1}(a)$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό $N: f^{-1}(a) \to \mathbb{R}^3$

$$N(p) = \frac{\text{grad} f}{\|\text{grad} f\|}(p), \quad p \in f^{-1}(a)$$

$$\text{grad} f = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Απόδειξη

Η απεικόνιση $N : S \to \mathbb{R}^3$ είναι λεία και προφανώς
$\| N(p) \| = 1 \quad \forall p \in S \quad , S = f^{-1}(a)$

Μένει ν.δ.ο. $N(p) \perp T_p S$

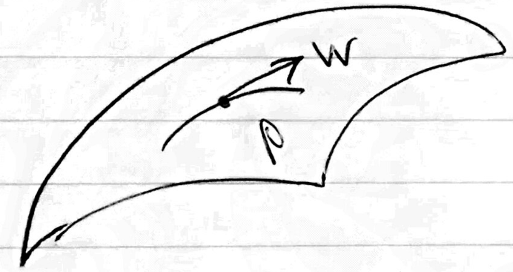
ή ισοδύναμα $\langle N(p), w \rangle = 0 \quad \forall w \in T_p S$

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \quad , \quad c(0) = p \quad , c'(0) = W \; (w_1, w_2, w_3)$

$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$c(0) = p = (x_0, y_0, z_0)$

$W = c'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0))$



$c(t) \in f^{-1}(a) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$f(c(t)) = a \quad , \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow f(x(t), y(t), z(t)) = a \longrightarrow$

παραγ. ως προς t $\Longrightarrow$

$x'(t) \cdot f_x(x(t), y(t), z(t)) +$
$y'(t) \cdot f_y(x(t), y(t), z(t)) +$
$z'(t) \cdot f_z(x(t), y(t), z(t)) = 0$

Θέλω $t = 0$

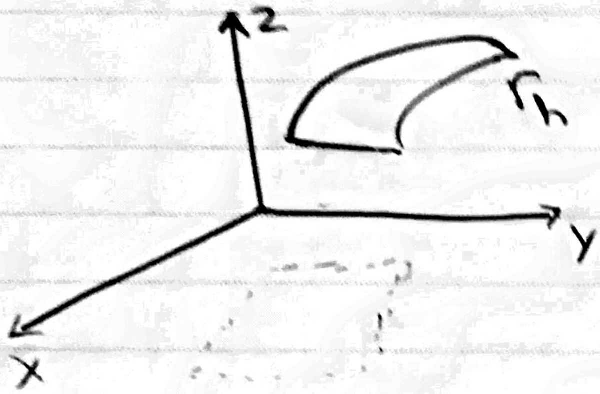
$x'(0) \cdot f_x(p) + y'(0) \cdot f_y(p) + z'(0) \cdot f_z(p) = 0$

$w_1 \cdot f_x(p) + w_2 \cdot f_y(p) + w_3 f_z(p) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\langle (w_1, w_2, w_3) \; , \; (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \quad \langle w, \operatorname{grad} f(p) \rangle = 0 .$

Τα γραφήματα είναι προσανατολισμένη επιφάνεια
$h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία



$\Gamma_h = \{ (x,y,h(x,y)) / (x,y) \in U \}$
Θεωρώ την $f: U \times U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$f(x,y,z) = z - h(x,y)$
$\Gamma_h = f^{-1}(0)$
$\text{grad} f(x,y,z) =$
$= (-h_x(x,y), -h_y(x,y), 1) \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow$ Γ_h είναι προσανατολισμένη με προσανατολισμό
$N: \Gamma_h \to \mathbb{R}^3$

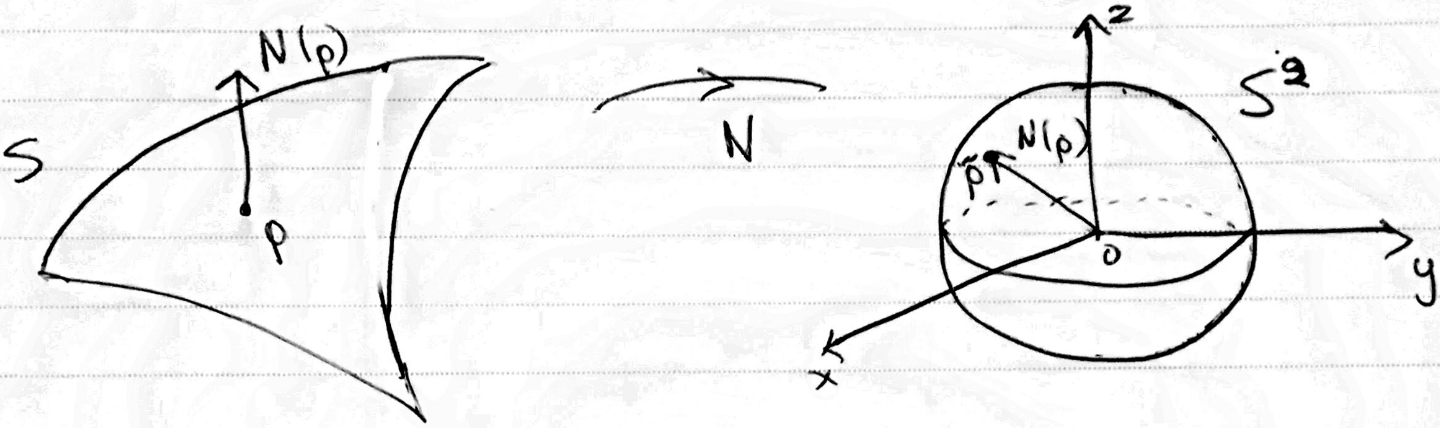
$$N(x,y,h(x,y)) = \frac{(-h_x(x,y), -h_y(x,y), 1)}{\sqrt{h_x^2(x,y) + h_y^2(x,y) + 1}}$$

$X: U \to \Gamma_h$, $X(u,v) = (u,v,h(u,v))$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\| X_u \times X_v \|} \circ X^{-1}$$

Σφαιρική Απεικόνιση ή Απεικόνιση Gauss

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό $N: S \to \mathbb{R}^3$



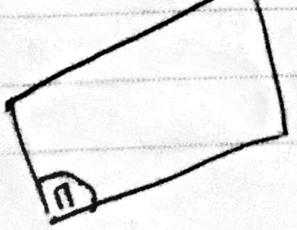
$$S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

Η σφαιρική απεικόνιση ή απεικόνιση Gauss είναι η απεικόνιση η οποία σε κάθε σημείο p της S αντιστοιχεί το σημείο $\tilde{p} \in S^2$ τ.ω $\overrightarrow{O\tilde{p}} = N(p)$

Παρατήρηση: Οι συντεταγμένες του σημείου $\tilde{p}$ είναι ακριβώς οι συντεταγμένες του διανύσματος $N(p)$
Συμβολίζω την απεικόνιση Gauss με $N: S \to S^2$.
Προφανώς είναι διαφορίσιμη.

Παραδείγματα.

① Επίπεδα Θεωρώ επίπεδο $\Pi: Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$
$(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$
Θεωρώ την $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με
$f(x,y,z) = Ax + By + \Gamma z + \Delta$

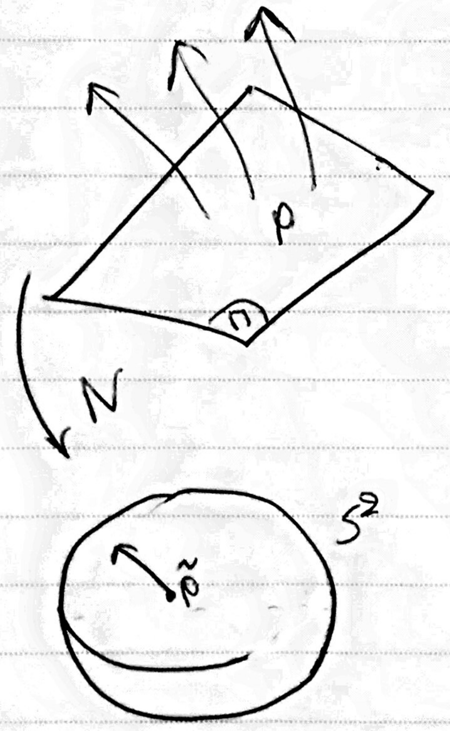


$\text{grad} f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z) = (A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$

Άρα f κανένα κρίσιμο σημείο.

Θεώρημα $\Rightarrow$ Π προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό:

$$N(p) = \frac{\text{grad} f}{\|\text{grad} f\|} = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$



Η απεικόνιση Gauss είναι η

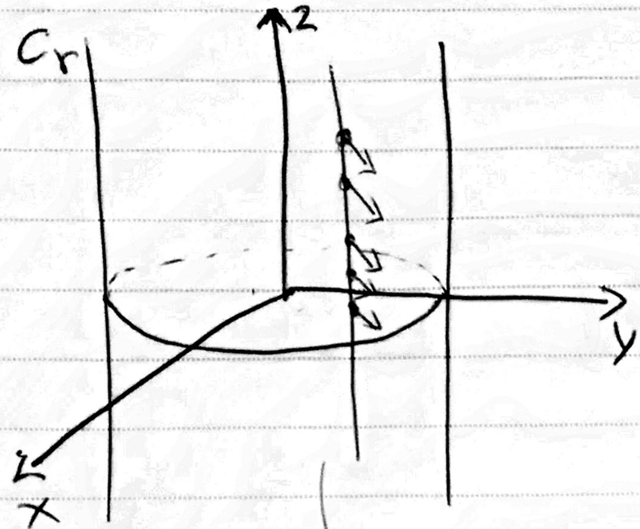
$N : \Pi \to S^2$

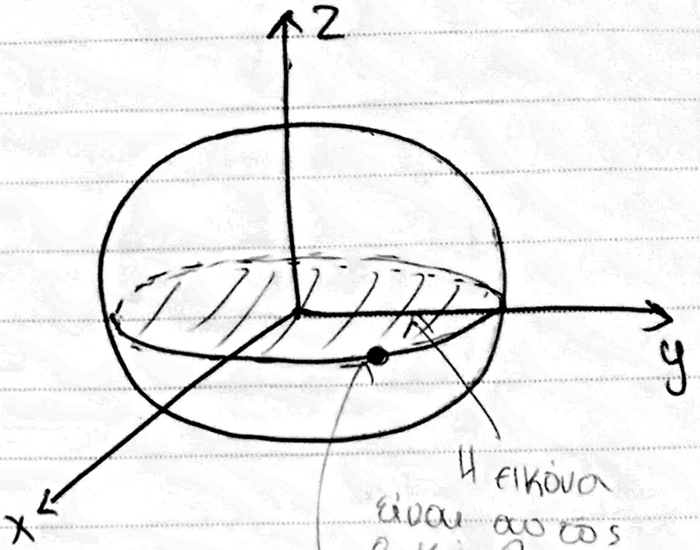
$$N(p) = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}, \frac{B}{\sqrt{\ }}, \frac{\Gamma}{\sqrt{\ }} \right)$$

Άρα N σταθερή

άρα σταθερή απεικόνιση Gauss

② Ορθός κυκλικός κύλινδρος $\quad C_r : x^2+y^2=r^2$





μόνο το z αλλάζει

Το N σταθερό, όλα τα σημεία αυτά θα πηγαίνουν σε ένα σημείο του κύκλου

Θεωρώ: $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2-r^2$

$C_r = f^{-1}(0)$

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, 0)$

Το $f^{-1}(0)$ δεν περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο της f

$f \xrightarrow{\text{θεώρημα}}$ C_r είναι προσανατολίσιμη με προσανατολισμό $N: C_r \to \mathbb{R}^3$

$$N(x,y,z) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(x,y,z) = \frac{(2x,2y,0)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}(x,y,0)$$

Άρα η απεικόνιση Gauss του C_r είναι η $N: C_r \to S^2$,

$$N(x,y,z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 0\right)$$

✱

(*) Δεν εξαρτάται από το z άρα δεν είναι 1-1

→ Η απεικόνιση Gauss πήρε την επιφάνεια και την έκανε καμπύλη.

Είναι η απεικόνιση Gauss 1-1;
Αφού πήγαμε από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$ χάσαμε μία διάσταση, άρα δεν μπορεί να είναι 1-1.

(3) Σφαίρα

Θεωρώ την σφαίρα: $S_R^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 = R^2\}$
Θεωρώ την λεία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
με $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$
Έχω $S_R^2 = f^{-1}(0)$
$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

Το $S^2 = f^{-1}(0)$ δεν περιέχει το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f το $(0,0,0)$ $\xrightarrow{\text{Θεώρημα}}$

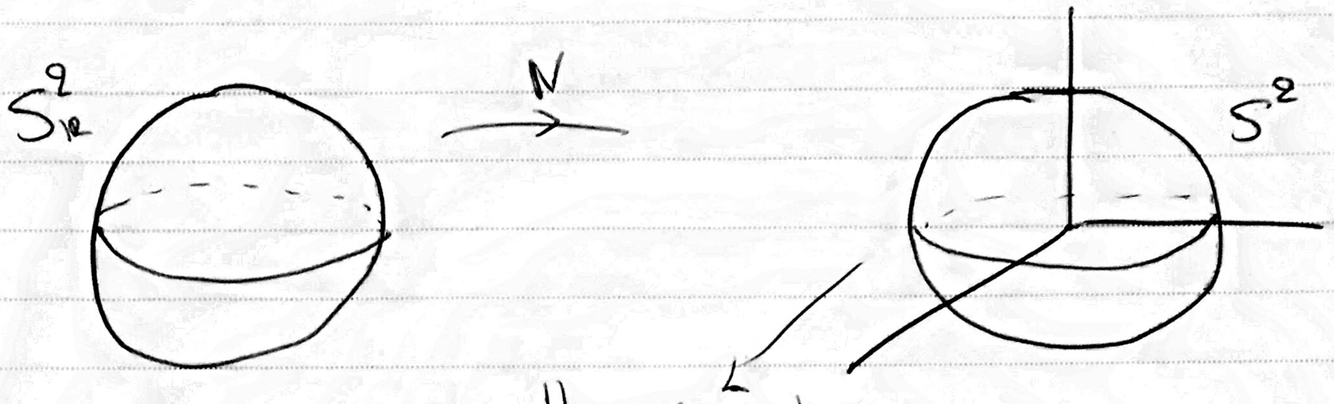
Η S_R^2 είναι προσ/νη με προσ/μο $N: S_R^2 \to \mathbb{R}^3$, $N(p)$

$$N(x,y,z) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(x,y,z) = \frac{(2x,2y,2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$

$$N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,z)$$

Η απεικόνιση Gauss είναι $N: S^2_R \to S^2$

$N(x,y,z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, $(x,y,z) \in S^2$



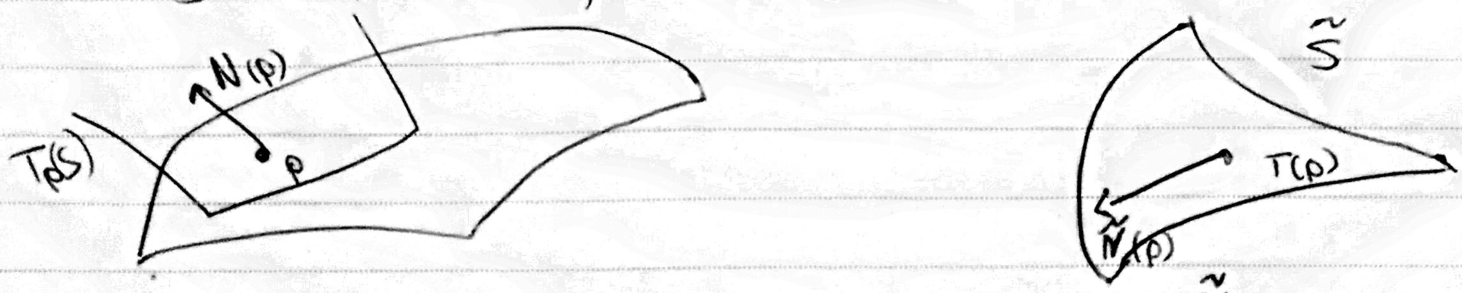
Εδώ είναι 1-1 η απεικόνιση Gauss.

Σχόλια

Γεωμετρικώς ισότιμες επιφάνειες

Έστω S και $\tilde{S}$ γεωμετρικώς ισότιμες επιφάνειες, δηλ
$\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^3)$

$$\tilde{S} = T(S), \quad T = T_S \circ A$$



$\tilde{X} = T \circ X$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{X}_u &= AX_u\\ \tilde{X}_v &= AX_v\end{aligned}\right| \Rightarrow \tilde{X}_u \times \tilde{X}_v = (AX_u) \times (AX_v) = \pm A(X_u \times X_v)$$

$+$: αν είναι στροφή

$-$: αν είναι ψευδοστροφή

$$\tilde{N}(p) = \pm A N(p)$$